FORMULARIO DE ELECTROMAGNETISMO

DATOS: $\boldsymbol{\varepsilon_0 = \frac{1}{36\,\pi}\, 10^{-9}\, \frac{C^2}{N\cdot m^2}} \qquad \boldsymbol{\mu_0 = 4\,\pi\, 10^{-7}\, \frac{N}{A^2}}$

EXPRESIONES:

Tema 2.- Campo electrostático creado por distribuciones de cargas en el vacío:

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{r^2}\hat{r} + \oint_{C'} \frac{\lambda(\vec{R}')}{r^2}\hat{r}\, dl' + \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{R}')}{r^2}\hat{r}\, dS' + \int_{V'} \frac{\rho(\vec{R}')}{r^2}\hat{r}\, dV'\right]$$

-Teorema de Gauss: $\int_{S_c} \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q_T/\varepsilon_0$

Tema 3.- Potencial electrostático creado por distribuciones de cargas:

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{r} + \oint_{C'} \frac{\lambda(\vec{R}')}{r}\, dl' + \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{R}')}{r}\, dS' + \int_{V'} \frac{\rho(\vec{R}')}{r}\, dV'\right]$$

Tema 4.- Identidad generalizada de Green: $\Phi(\vec{R}) = \int_V \rho(\vec{R}')\, G(\vec{R},\vec{R}')\, dV' + \varepsilon_0 \int_S \left(G\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial G}{\partial n}\right) dS'$

Tema 5.- Potencial y campo electrostático creados por un dipolo eléctrico en el vacío:

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \qquad\qquad \vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$$

Campo electrostático creado por una capa dipolar: $\vec{E}(\vec{R}) = \frac{-\tau}{4\pi\varepsilon_0}\oint_c \frac{\vec{r}\wedge d\vec{l}}{r^3}$

Desarrollos multipolares del potencial:

- Carga puntual: $\Phi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(\cos\theta)$

- Distribución lineal de carga en el eje z: $\Phi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{M_l P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}}, \; M_l = \int \lambda(z')\, z'^l\, dz'$

- Expresión general:

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{R} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{R^3} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{x_i x_j}{R^5}Q_{ij} + \ldots\right] \quad \text{con} \quad Q_{ij} = \int_{V'} \rho(R')\left(3x'_i x'_j - \delta_{ij}R'^2\right) dV'$$

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{R} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{R^3} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{\left(3x_i x_j - \delta_{ij}R^2\right)}{R^5}Q'_{ij} + \ldots\right] \quad \text{con}\ Q'_{ij} = \int_{V'} \rho(R')\, x'_i x'_j\, dV'$$

Tema 6.- Vector desplazamiento eléctrico: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$

Tema 7.- Resolución de la ecuación del potencial por el método de separación de variables:

(Solución general es combinación lineal de todas las soluciones particulares.)

-Coordenadas cartesianas: $\Phi(x_1,x_2,x_3) = X_1(x_1)\cdot X_2(x_2)\cdot X_3(x_3)$

- Si $k_i = 0$ (i=1,2,3) $\quad X_i = A_i x_i + B_i$

- Si $k_i \neq 0$ (i=1,2,3) $\quad X_i = C_i(k_i)e^{k_i x_i} + C'_i(k_i)e^{-k_i x_i}$

- Coordenadas esféricas: $\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{R(r)}{r}P(\theta)\phi(\varphi)$

Problemas con simetría de revolución en torno a un eje (eje z), $\Phi = \Phi(r,\theta)$.

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right]\cdot P_l(\cos\theta) \quad con \quad l = 0,1,2,3....$$

- Coordenadas cilíndricas:

Si la geometría no varía a lo largo de un eje (eje z), $\Phi = \Phi(r,\varphi)$

$$\Phi(r,\varphi) = (A_0 + B_0 \ln r)\cdot(C_0 + D_0\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n r^n + B_n r^{-n}\right]\cdot\left(C_n\, sen\, n\varphi + D_n \cos n\varphi\right)$$

Tema 7.- Coeficientes de potencial: $p_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 q_i q_j}\int_{S_i}\int_{S_j}\frac{\sigma_i\sigma_j}{r_{ij}}dS_i\, dS_j$

Tema 8.- Energía electrostática almacenada en:

- un sistema de cargas puntuales: $W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\phi_i$

- una distribución de cargas: $W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{R}')\phi(\vec{R}')\,dV$

- un medio dieléctrico: $W_e = \int_V dV\int_0^{\vec{D}}\vec{E}\cdot\delta\vec{D}$

Tema 9.- Fuerza por unidad de volumen en un dieléctrico: $\vec{f} = \rho\vec{E} - \frac{1}{2}E^2\vec{\nabla}\varepsilon + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(E^2\rho_m\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_m}\right)$

Componentes del tensor de Maxwell: $T_{ij} = E_i D_j - \frac{1}{2}\left[\vec{E}\cdot\vec{D} - E^2\rho_m\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_m}\right]\delta_{ij}$

Componentes de la densidad de fuerza a partir del tensor de Maxwell: $f_i = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$

Fuerza total sobre un volumen V: $F_i = \int_V f_i dV = \int_V\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}dV = \sum_{j=1}^{3}\int_{S_j}T_{ij}dS_j$

Tema 10.- Ecuación de continuidad**:** $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}\left(\vec{R},t\right) + \frac{\partial\rho\left(\vec{R},t\right)}{\partial t} = 0$

Tema 11. -Fuerzas entre circuitos lineales, (Fuerza que ejerce el circuito 2 sobre el 1)

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \wedge (d\vec{l}_2 \wedge \vec{r}_{21})}{r_{21}^3}$$

Campo $\vec{B}$, inducción magnética, creado por una carga q que se mueve con velocidad uniforme $\vec{v}$.

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \vec{v} \wedge \frac{\vec{r}}{r}$$

Teorema de Ampère: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_T$

Tema 12.- Campo $\vec{B}$, inducción magnética, creado por distribuciones de corrientes.

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ I \oint_{C'} \frac{d\vec{l}'(\vec{R}') \wedge \vec{r}}{r^3} + \int_{S'} \frac{\vec{J}_s(\vec{R}') \wedge \vec{r}}{r^3} dS' + \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{R}') \wedge \vec{r}}{r^3} dV' \right\}$$

Campo $\vec{B}$, inducción magnética, creado por un dipolo magnético

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}$$

Potencial magnético-vector creado por una distribución de corrientes en el vacío.

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ I \oint_{C'} \frac{d\vec{l}(\vec{R}')}{r} + \int_{S'} \frac{\vec{J}_s(\vec{R}') dS'}{r} + \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{R}') dV'}{r} \right\}$$

Potencial magnético-escalar creado por un circuito lineal. $\phi_m = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega$

Potencial magnético-escalar creado dipolo magnético: $\phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}$

Potencial magnético vector creado dipolo magnético: $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3}$

Densidades de corrientes equivalentes: $\vec{J}_{s,m} = \vec{M} \wedge \hat{n}$,, $\vec{J}_m = \vec{\nabla} \wedge \vec{M}$

Tema 13.- Campo local : $\vec{B}_{loc} = \vec{B}_m - \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$

Ecuación de Weiss: $\vec{B}_{loc} = \vec{B}_m + \mu_0 (\gamma - 1) \vec{M}$

Vector $\vec{H}$, intensidad de campo magnético: $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

Potencial magnético pseudoescalar, Ψ: $\vec{H} = -\vec{\nabla} \Psi$

Potencial magnético Ψ creado por medios imanados:

$$\Psi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{M}(\vec{R}') \cdot \hat{n}}{r} dS' + \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{-\vec{\nabla} \cdot \vec{M}(\vec{R}')}{r} dV'$$

Campo $\vec{H}$ creado por medios imanados

$$\vec{H}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi}\int_{S'} \frac{\left(\vec{M}(\vec{R}')\cdot\hat{n}\right)\hat{r}}{r^2}\, dS' + \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\left(-\vec{\nabla}\cdot\vec{M}(\vec{R}')\right)\hat{r}}{r^2}\, dV'$$

Reluctancia de un circuito magnético: $\mathsf{R} = \int_C \frac{dl}{\mu S}$

Tema 14.- Campo eléctrico inducido para sistemas en movimiento: $\vec{E}_v = \vec{E}_r + \vec{v}\wedge\vec{B}$

Coeficientes de inducción: $M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S_i}\oint_{C_j} \frac{d\vec{l}_j \wedge \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\cdot d\vec{S}_i$

Fórmula de Neuman: $M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_i}\oint_{C_j} \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_j}{r_{ij}}$

Tema 15.- Energía magnética almacenada en un medio permeable: $W_m = \int_V dV \int_0^{\vec{B}} \vec{H}\cdot\delta\vec{B}$

Densidad de fuerza (de Lorentz): $\vec{f}_{em} = \rho\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right)$

Componentes del tensor magnético de Maxwell: $T_{ij} = B_i H_j - \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\,\delta_{ij}$

Tema 16.- Ecuaciones de Maxwell:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{real} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Ecuación de Ondas: $\nabla^2\vec{G}(\vec{R},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{G}(\vec{R},t)}{\partial t^2} = \vec{g}(\vec{R},t)$

Tema 17.-Ondas planas en el vacío: $\vec{E}(\vec{R},t) = \vec{E}_0\, e^{-j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{R})}$; $\vec{H}(\vec{R},t) = \vec{H}_0\, e^{-j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{R})}$

$$\vec{H} = \frac{k}{\mu_0\omega}(\vec{l}\wedge\vec{E}) \quad \rightarrow \quad \vec{k}\wedge\vec{E} = \mu_0\omega\vec{H}$$

Medio l.h.i. conductor: $k^2 = j\mu\omega(\sigma - j\omega\varepsilon) = \omega^2\varepsilon\mu + j\sigma\mu\omega$

Teorema de Poynting, ($\vec{S} = \vec{E}\wedge\vec{H}$): $\int_S \vec{S}\cdot d\vec{S} + \int_V \frac{J^2}{\sigma}dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \omega_{em}\, dV = \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}''\, dV$

Flujo del tensor electromagnético: $\int_S \mathbf{T}^{(em)}\cdot d\vec{S} = \int_V \left(\rho\,\vec{E} + \vec{J}\wedge\vec{B} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{S}}{\partial t}\right) dV$.

Momento electromagnético: $\vec{G} = \int_V \varepsilon_0\, \vec{E}\wedge\vec{B}\, dV$